OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 14.02.2015
Clasa a VII-a

1. a) Arătaţi că $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}>\sqrt{2015}$.

b) Fie $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+...+\frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2014}}{\sqrt{2015\cdot 2014}}$. Determinaţi $\left[x\sqrt{2015}\right]$, unde $\left[a\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

* * *

2. Fie $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=c^2$ şi a ≤ b. Arătaţi că:

a) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\notin\mathbb{Q}$;

b) există a, b cu $a\nmid 5, b\nmid 5$ şi cmmdc$(a,b)=1$, astfel încât $\sqrt{a^2b^2+c^2}\in\mathbb{N}$.

Laurenţiu Ţibrea

3. În paralelogramul *ABCD*, considerăm $AC\cap BD=\{O\}$, $M,N\in(AC)$ astfel încât *A-M-N* şi $(AM)\equiv(NC)$. Dacă $DM\cap BC=\{L\}$ şi $BN\cap AD=\{T\}$, arătaţi că:

a) $(DN)\equiv(BM)$;

b) *L*, *O*, *T* sunt coliniare.

* * *

4. În triunghiul *ABC* cu $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ şi $m(\sphericalangle C)=30^\circ$, considerăm bisectoarea [*BE*, $E\in[AC]$ şi un punct *D* pe $[BC]$ astfel încât $BC=3BD$. Dacă $\{O\}=BE\cap AD$ şi *F* este mijlocul lui $[AB]$, arătaţi că *F*, *O* şi *C* sunt coliniare.

GM 11/2014

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.